### Dual, bidual d'un espace vectoriel normé, topologie faible.

Soit $E$ un espace normé. Le dual $E'$ de $E$ est l'espace des formes linéaires continues sur $E$. On note $E''$ le dual de $E'$ et on l'appelle le bidual de $E$.

Pour tout $x \in E$, on définit une forme linéaire $\phi_x$ sur $E'$, par $\phi(x)(f) = f(x)$. Comme, $|\phi_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|.\|f\|$, ainsi $\phi_x$ est un élément de $E''$.

2.2.35 Théorème

Soit $E$ un espace vectoriel normé. Alors $E$ est isométriquement isomorphe à un sous-espace $\widetilde{E}$ de son bidual $E''$, plus précisément l'application $J_E : E \to E''$ définie par $J_E(x) = \phi_x$ est une isométrie linéaire.

---

*Démonstration:* On vérifie facilement que l'application $J_E$ est linéaire, elle est continue car $\|J_E(x)\| = \|\phi_x\| \leq \|x\|$. Il nous reste à montrer que $J_E$ est une isométrie. D'après le corollaire 2.2.29, pour tout $x \in E$, il existe $f \in E'$ telle que $f(x) = \|x\|$ et $\|f\| = 1$. D'où

$$\|J_E(x)\| = \|\phi_x\| = \sup_{\|f\|=1} |\phi_x(f)| \geq |\phi_x(f)| = |f(x)| = \|x\|,$$

ainsi $\|J_E(x)\| = \|x\|$. Ceci termine la preuve du théorème. ∎

L'isométrie $J_E : E \to J(E) \subset E''$ est appelée l'application canonique de $E$ dans $E''$.

2.2.37 Définition

Un espace vectoriel normé $E$ est dit reflexif si $J(E) = E''$.

---

2.2.38 Remarque

i) Si $E$ est reflexif, alors $E$ est isométriquement isomorphe à $E''$.
La réciproque est fausse, il y a un exemple d'espace non reflexif mais qui est isométriquement isomophe à sont bidual.

ii) Tout espace de dimension finie est un espace réflexif. Les espaces $\ell^p$, $L^p$ $(1 < p < \infty)$ et les espaces de Hilbert sont des espaces reflexifs.

iii) Tout espace normé réflexif est un espace de Banach, puisqu'il est isomorphe à son bidual qui est complet. La réciproque est en général fausse, $\ell^1$ est un Banach, mais n'est pas réflexif, son dual est $\ell^\infty$, mais $\ell^\infty$ n'étant pas séparable, son dual n'est pas $\ell^1$ ( voir le théorème 2.2.50).

2.2.39 PROPOSITION
Si $E = \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $1 \leq p < \infty$, alors son dual $(\ell^p)' = \ell^q$ où $q$ est son exposant conjugué i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Plus précisement , $\ell^q$ est isométriquement isomorphe à $(\ell^p)'$ par l'isométrie suivante : $T : \ell^q \to (\ell^p)'$, définie par : pour $b = (b_n)_n \in \ell^q$, l'application $T((b)) : \ell^p \to \mathbb{K}$ est définie par : pour tout $a = (a_n)_n \in \ell^p$, $T(b)(a) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$.

D'où $(\ell^p)'' = \ell^p$, pour tout $p \in ]1, +\infty[$.

*Démonstration:* On commence par montrer que $T$ est bien définie. Si on fixe $b = (b_n)_n \in \ell^q$ alors, l'inégalité de Hölder nous donne

$$|\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n| \leq \|a\|_p \|b\|_q < \infty \tag{2.2.2}$$

pour tout $a = (\alpha_n)_n \in \ell^p$. D'où $(T(b))(a)$ converge et donc $T(b) : \ell^p \to \mathbb{K}$ est bien définie. Il est facile de vérifier qu'elle est linéaire.

De l'inégalité 2.2.2, on déduit que $T(b)$ est continue et $\|T(b)\| \leq \|b\|_q$. D'où $T(b)$ est un élément du dual de $\ell^p$ et $\|T(b)\|_{(\ell^p)'} \leq \|b\|_q$.

On va montrer que $\|T(b)\| \geq \|b\|_q$. Si $b = 0$ il n'y a rien à faire. On suppose que $b \neq 0$ et on pose $a_n = \begin{cases} \frac{|b_n|^q}{b_n} & \text{si } b_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } b_n = 0 \end{cases}$

Alors $a = (a_n)_n \in \ell^p$ et
$\|a\|_p = (\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p)^{1/p} = (\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |b_n|^{qp-p})^{1/p} = (\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |b_n|^q)^{1/p} = \|b\|_q^{q/p}$, car $(q-1)p = q$. On a $T(b)(a) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |b_n|^q = \|b\|_q^q$. D'où

$$\|T(b)\|_{(\ell^p)'} \geq \frac{|T(b)(a)|}{\|a\|_p} = \frac{\|b\|_q^q}{\|b\|_q^{q/p}} = \|b\|_q^{q-q/p} = \|b\|_q.$$

Ainsi $\|T(b)\|_{(\ell^p)'} = \|b\|_q$, pour tout $b \in \ell^q$, donc $T$ est une isométrie linéaire.

On va montrer que $T$ est surjective. Soit $f \in (\ell^p)'$, non nul. On définit $b = (b_n)_n$ par $b_n = f(e_n)$ où $e_n$ est le nième élément de la suite canonique i.e. $e_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$, la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui en nième position qui vaut 1. On va montrer que $b \in \ell^q$ et que $T(b) = f$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit une suite à support fini, $x^{(m)} = (a_n)_n$ telle que

$$a_n = \begin{cases} \frac{|b_n|^q}{b_n} & \text{si } b_n \neq 0 \text{ et } 0 \leq n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m \text{ ou } b_n = 0 \end{cases}$$

Alors

$$\|x^{(m)}\|_p = (\sum_{n=0}^{m} |b_n|^q)^{1/p}$$

et

$$f(x^{(m)}) = \sum_{n=0}^{m} a_n b_n = \sum_{n=0}^{m} |b_n|^q$$

d'où $\|f\|_{(\ell^p)'} \geq \dfrac{|f(x^{(m)})|}{\|x^{(m)}\|_p} = \dfrac{\sum_{n=0}^{m} |b_n|^q}{(\sum_{n=0}^{m} |b_n|^q)^{\frac{1}{p}}} = (\sum_{n=0}^{m} |b_n|^q)^{1-\frac{1}{p}} = (\sum_{n=0}^{m} |b_n|^q)^{1/q}$.
Lorsqu'on fait tendre $m$ vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $\|b\|_q \leq \|f\|_{(\ell^p)'}$, donc $b \in \ell^q$ et $T(b) = f$. ■

**2.2.41 PROPOSITION**
Si $E = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, alors son dual $(\ell^1)' = \ell^\infty$. Plus précisement , $\ell^\infty$ est isométriquement isomorphe à $(\ell^1)'$ par l'isométrie suivante : $T : \ell^\infty \to (\ell^1)'$, définie par : pour $b = (b_n)_n \in \ell^\infty$, l'application $T((b)) : \ell^1 \to \mathbb{K}$ est définie par : pour tout $a = (a_n)_n \in \ell^1$, $T(b)(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

*Démonstration:* $T$ est bien définie car pour tout $a \in \ell^1$ et $b \in \ell^\infty$
$|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n| \leq \|b\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leq \|a\|_1 \|b\|_\infty < \infty$ D'où $T(b)$ est un élément du dual de $\ell^1$ et $\|T(b)\|_{(\ell^1)'} \leq \|b\|_\infty$. Soit $n_0$ tel que $b_{n_0} \neq 0$ on pose $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $a_n = |b_n|/b_n$ pour $n = n_0$ et $a_n = 0$ sinon. Alors $\|a\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = |a_{n_0}| = 1$ et $|T(b)(a)| = |\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n| = |a_{n_0} b_{n_0}| = |b_{n_0}|$. d'où $\|T(b)\|_{(\ell^1)'} \geq \frac{|T(b)(a)|}{\|a\|_1} = \frac{|b_{n_0}|}{1} = |b_{n_0}|$, et ceci est vrai pour tout $n_0$ avec $b_{n_0} \neq 0$. Ainsi

$$\|T(b)\|_{(\ell^1)'} \geq \sup_{n_0, b_{n_0} \neq 0} |b_{n_0}| = \sup_n |b_n| = \|b\|_\infty.$$

On a $\|T(b)\|_{(\ell^1)'} = \|b\|_\infty$, pour tout $b \in \ell^\infty$, donc $T$ est une isométrie linéaire.

On va montrer que $T$ est surjective. Soit $f \in (\ell^1)'$, non nul. On définit $b = (b_n)_n$ par $b_n = f(e_n)$. Comme $\|e_n\|_1 = 1$

$$|b_n| = |f(e_n)| \leq \|f\|_{(\ell^1)'} \|e_n\|_1 = \|f\|_{(\ell^1)'}.$$

Alors $\|b\|_\infty = \sup_n |b_n| \leq \|f\|_{(\ell^1)'}$, d'où $b \in \ell^\infty$ et $f = T(b)$. ■

**2.2.43 REMARQUE**
Mais $\ell^1$ n'est pas réflexif, car $(\ell^\infty)' \neq \ell^1$ (voir 2.2.50)

**2.2.44 PROPOSITION**
Soit $E$ un espace réflexif. Alors, tout élément $f \in E'$ atteint sa norme sur $E$.

*Démonstration:* En effet, pour $f \in E'$, d'après le lemme 2.2.29, il existe $\phi_x \in E''$ tel que $\phi_x(f) = \|f\|$ i.e $f(x) = \|f\|$. ■

La réciproque de la proposition 2.2.44 est également vraie. Si toute forme linéaire continue $f \in E'$ sur un espace de Banach $E$ atteint sa norme, alors $E$ est réflexive (le théorème de James (1971)).

### 2.2.46 Définition (famille totale)

Une famille $\{x_i\}_{i\in I}$ d'un evn $E$ est dite totale si l'espace vectoriel engendré par $\{x_i\}_{i\in I}$ est dense dans $E$ i.e. $\overline{\mathrm{Vect}\{x_i \,|\, i \in I\}} = E$.

Une suite totale est une famille totale dénombrable.

---

### 2.2.47 Proposition

Un espace vectoriel normé est séparable si et seulement s'il admet une suite totale.

*Démonstration:* Si $E$ est séparable il admet une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dense, en particulier c'est une suite totale dense.

Réciproquement, soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite totale de $E$ .
Alors, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{\sum_{i\in J} \lambda_i x_i \,|\, I \text{ fini}\,, \lambda_i \in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q}\}$ est un ensemble dénombrable et dense dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et donc dense dans $E$, ainsi $E$ est séparable. ∎

### 2.2.49 Remarque

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $F$ un sous-espace vectoriel fermé (strict) de $E$ et $x_0 \in E \setminus F$.
Alors, il existe $\phi \in E'$ tel que $\phi|_F = 0$, et $\phi(x_0) = d(x_0, F) > 0$ (voir TD).
On en déduit qu'un sous-espace $F$ est dense dans $E$ (i.e. $\overline{F} = E$) si et seulement si $\phi \in E'$ et $\phi|_F = 0$, alors $\phi = 0$.

### 2.2.50 Théorème (Dualité et séparabilité)

Soit $E$ un espace vectoriel normé. Si $E'$ est séparable, il en est de même de $E$.

---

*Démonstration:* Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E'$ qui est dense. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$ telle que pour tout $n$ : $\begin{cases} |f_n(x_n)| \geq \dfrac{1}{2}\|f_n\| \\ \|x_n\| = 1 \end{cases}$

On va montrer que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $E$. Pour cela, d'après la remarque précédente, il suffit de montrer que toute $f \in E'$ qui s'annule sur la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est identiquement nulle.

Soit $f \in E'$ telle que $f(x_n) = 0 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par densité de la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $||f - f_{n_\varepsilon}|| \leq \epsilon$. Donc

$$\frac{1}{2}||f_{n_\varepsilon}|| \leq |f_{n_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon})| = |(f_{n_\varepsilon} - f)(x_{n_\varepsilon})| \leq ||f_{n_\varepsilon} - f||||x_{n_\varepsilon}|| \leq \epsilon.$$

Donc $||f|| \leq ||f - f_{n_\varepsilon}|| + ||f_{n_\varepsilon}|| \leq 3\epsilon$. Comme $\varepsilon$ est arbitraire ceci entraîne que $f = 0$. ■

2.2.52 REMARQUE

La réciproque à la proposition 2.2.50, est en générale fausse ; par exemple : $(\ell^1)' = \ell^\infty$ ; $\ell^1$ est séparable, mais pas son dual $\ell^\infty$ .

### Théorème de Hahn-Banach : forme géométrique

2.2.53 DÉFINITION

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un *hyperplan affine* de $E$ est un sous-espace affine de codimension 1 de $E$, ou, de manière équivalente une partie de $E$ de la forme

$$H = f^{-1}(\alpha) = \{x \in E : f(x) = \alpha\},$$

où $f$ est une forme linéaire non nulle et $\alpha \in \mathbb{K}$. Nous dirons alors que $f = \alpha$ est une équation de $H$.

i) On dit qu'un hyperplan affine $H$ d'équation $f = \alpha$ *sépare* deux parties $A$ et $B$ de $E$ si, quitte à échanger $A$ et $B$, on a $A \subset f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ et $B \subset f^{-1}([\alpha, +\infty[)$.

ii) On dit qu'un hyperplan affine $H$ d'équation $f = \alpha$ *sépare strictement* $A$ et $B$ d s'il existe $\epsilon > 0$ tel que, quitte à échanger $A$ et $B$, on a $A \subset f^{-1}(]-\infty, \alpha - \epsilon])$ et $B \subset f^{-1}([\alpha + \epsilon, +\infty[)$.

---

2.2.54 PROPOSITION

Un hyperplan de $E$ est fermé si et seulement si $f \in E'$.

*Démonstration:* On a $H = f^{-1}(\alpha) = a + \ker f$, d'où $H$ est fermé si et seulement si $\ker f$ est fermé, on a déjà vu que $\ker f$ est fermé si et seulement si $f$ est continue. ■

2.2.56 THÉORÈME (THÉORÈME DE HAHN-BANACH (FORMES GÉOMÉTRIQUES))

Soit $E$ un evn sur $\mathbb{R}$. Soient $A$ et $B$ deux convexes non vides disjoints de $E$.

1) **(1ere forme géométrique)**
Si $A$ est ouvert, alors il existe un hyperplan affine fermé *séparant* $A$ et $B$.

2) **(2nd forme géométrique)**
Si $A$ est compact et si $B$ est fermé, alors il existe un hyperplan affine fermé *séparant strictement $A$ et $B$.*

---

2.2.57 Remarque
On peut en déduire la version suivante dans le cas où $E$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$

2.2.58 Théorème (Théorème de Hahn-Banach (formes géométriques) version complexe)
Soit $E$ un evn sur $\mathbb{C}$. Soient $A$ et $B$ deux convexes non vides disjoints de $E$.

1) **(1ere forme géométrique)**
Si $A$ est ouvert, alors il existe $f \in E' - \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{Re} f(a) \ \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b),\ \forall a \in A,\ b \in B.$$

2) **(2nd forme géométrique)**
Si $A$ est compact et si $B$ est fermé, alors il existe $f \in E' - \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\operatorname{Re} f(a) + \varepsilon \ \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b) - \varepsilon,\ \forall a \in A,\ b \in B.$$

---

Pour la démonstration, on considère $E$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on applique la version réelle du théorème qui donne $f_1 : E \to \mathbb{R}$ forme linéaire continue non nulle telle que, $f_1(a) \ \leq \ \alpha \ \leq \ f_1(b)$, $\forall a \in A,\ b \in B$. Alors, $f$ définie par $f(x) := f_1(x) - i f_1(ix)$, pour $x \in E$, convient.

On a besoin pour la démonstration d'établir les résultats suivants :

2.2.59 Lemme ( Jauge ou Fonctionnelle de Minkowski)
Soit $C$ un convexe ouvert non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ tel que $0 \in C$. On pose pour tout $x \in X$, $p_C(x) := \inf\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\}$. Alors

i) $p_C$ est une application de $E$ dans $\mathbb{R}^+$, telle qu'il existe $M > 0$ et $p_C(x) \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$.

ii) $C = \{x \in E \,|\, p_C(x) < 1\}$.

iii) Pour tout $\lambda > 0$ et $x \in E$ on a $p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$.

iv) Pour tous $x, y \in E$, $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$.

$p_C$ est une forme sous-linéaire, appelée Jauge ou fonctionnelle de Minkowski de $C$.

*Démonstration:* i) Comme $0 \in C$, il existe une boule fermée $B'(0, r) \subset C$, d'où pour tout $x \in E - \{0\}$ on a $\frac{rx}{\|x\|} \in \bar{B}(0, r) \subset C$ Ainsi, l'application $p_C : X \to \mathbb{R}^+$ est bien définie et pour $M = \frac{1}{r}$ on a $p_C(x) \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$.

ii) Soit $x \in C$. Comme $C$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x \in C$, par suite $p_C(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Donc $C \subset \{p_C < 1\}$. Réciproquement, si $p_C(x) < 1$, par définition de $p_C(x)$, il existe $\alpha \in ]0,1[$ tel que $\frac{x}{\alpha} \in C$. Alors, par convexité de $C$, on aura $x = \alpha\dfrac{x}{\alpha} + (1-\alpha)0 \in C$. Donc $\{p_C < 1\} \subset C$.

iii) Soit $\lambda > 0$ et $x \in E$, $p_C(\lambda x) := \inf\{\alpha > 0 : \frac{\lambda x}{\alpha} \in C\} = \lambda \inf\{\frac{\alpha}{\lambda} > 0 : \frac{\lambda x}{\alpha} \in C\} = \lambda p_C(x)$.

iv) Soient $x, y \in E$ et $\alpha_1$ et $\alpha_2$ tels que $\frac{x}{\alpha_1} \in C$ et $\frac{y}{\alpha_2} \in C$.
Alors, par convexité,

$$\frac{x+y}{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\frac{x}{\alpha_1}\right) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\frac{y}{\alpha_2}\right) \in C$$

Ainsi $p_C(x+y) \leq \alpha_1 + \alpha_2$ et en passant à l'infimum sur $\alpha_1$ puis sur $\alpha_2$, on obtient l'inégalité $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$. ∎

On va utiliser ce lemme pour montrer, un cas particulier du théorème où l'un des deux sous-ensembles est un point.

2.2.61 PROPOSITION

Soit $C$ un convexe ouvert non vide, d'un $\mathbb{R}$-evn $E$ et $x_0 \notin C$.
Alors il existe une forme linéaire continue $f \in E' - \{0\}$, telle que pour tout $x \in C$,

$$f(x) < f(x_0).$$

*Démonstration:* Quitte à translater $C$, on peut supposer sans perte de généralité, que $0 \in C$. On définit sur $F = \mathbb{R}x_0$ une forme linéaire $f_0$ par $f_0(tx_0) = tp_C(x_0), \quad t \in \mathbb{R}$. Alors $f_0 \leq p_C$ sur $F$, en effet :

$$\begin{array}{ll} \text{si } t \geq 0, & f_0(tx_0) = tp_C(x_0) = p_C(tx_0); \\ \text{si } t \leq 0, & f_0(tx_0) = tp_C(x_0) \leq 0 \leq p_C(tx_0). \end{array}$$

Par le théorème de Hahn-Banach, $f_0$ admet un prolongement $f$ telle que $f(x) \leq p_C(x)$, pour tout $x \in E$. Pour terminer la preuve, nous avons besoin de vérifier que $f$ est continue et sépare $x_0$ de $C$. La continuité de $f$ découle des inégalités, pour tout $x \in E$, $f(x) \leq p_C(x) \leq M\|x\|$, puisqu'alors $-f(x) = f(-x) \leq M\|-x\| = M\|x\|$ et donc $|f(x)| \leq M\|x\|$, par suite $f \in E'$.
Comme $x_0 \notin C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}$, nous avons $f(x) \leq p_C(x) < 1 \leq p_C(x_0) = f_0(x_0) = f(x_0)$. ∎

*Démonstration: (du théorème de Hahn-Banach)* 2.2.58

1) **(1ere forme géométrique)**
On considère

$$C = \{c = a - b \,|\, a \in A,\ b \in B\}.$$

qui est convexe et non vide car $A$ et $B$ le sont, ouvert car c'est la réunion des ouverts $A - y$ pour $y$ dans $B$, et ne contient pas 0 puisque $A$ et $B$ sont disjoints. Par la proposition 2.2.61, il existe donc $\ell \in E'$ tel que $\ell(c) < 0$ pour tout $c$ dans $C$, i.e. tel que $\ell(a) < \ell(b)$ pour tous $a$ dans $A$ et $b$ dans $B$. Posons $\alpha = \sup\limits_{a \in A} \ell(a)$, qui vérifie donc $\alpha \leq \inf\limits_{b \in B} \ell(b)$. Alors l'hyperplan affine d'équation $\ell = \alpha$ (qui est fermé car $\ell$ est continue) sépare $A$ et $B$.

2) **(2nd forme géométrique)**
On considère
$$C = \{c = a - b \,|\, a \in A,\ b \in B\},$$
qui est convexe et non vide car $A$ et $B$ le sont, fermé car $A$ est compact et $B$ fermé, et ne contient pas 0 puisque $A$ et $B$ sont disjoints.
Comme $0 \notin C$ et $C$ fermé, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \cap C = \emptyset$. Puisque $B(0,r)$ est un convexe ouvert, la 1ere forme géométrique, donne l'existence d'un hyperplan fermé $H$ qui sépare $C$ et $B(0,r)$. Donc il existe $f \in E'$, $f \neq 0$, telle que
$$f(a-b) \leq f(rx) = rf(x),\ \forall a \in A,\ b \in B,\ x \in B(0,1).$$
Comme
$$\inf_{x \in B(0,1)} f(z) = - \sup_{x \in B(0,1)} |f(x)| = - \sup_{x \in B(0,1)} |f(x)| = -\|f\| < 0$$
$$\Rightarrow f(a) - f(b) \leq -r\|f\|,\ \forall a \in A,\ b \in B$$
$$\Leftrightarrow f(a) + \frac{r}{2}\|f\| \leq f(b) - \frac{r}{2}\|f\|\ \forall a \in A,\ b \in B.$$
On pose $\alpha = \sup\limits_{a \in A} f(a)$ et $\varepsilon = \frac{r}{2}\|f\|$
$$\Rightarrow f(a) + \varepsilon\ \leq \alpha \leq f(b) - \varepsilon,\ \forall a \in A,\ b \in B.$$
D'où $H = [f\ = \alpha]$ sépare strictement $A$ et $B$.

Voici une conséquence du théorème de Hahn-Banach (forme géométrique).

**2.2.64 Corollaire**
Chaque sous-ensemble convexe fermé $K$ d'un espace vectoriel normé $E$ est l'intersection de tous les demi-espaces fermés qui contiennent $K$.

---

Rappelons qu'un demi-espace est ce qui se trouve d'un côté d'un hyperplan ; donc un demi-espaces est de la forme
$$\{x \in E : f(x) \leq a\}$$
pour $f \in E'$, $a \in \mathbb{R}$.

*Démonstration:* $K$ est trivialement contenu dans l'intersection des demi-espaces qui contiennent $K$. Pour prouver l'autre inclusion, on choisit un point $x_0 \notin K$ et on utilise le théorème de séparation 2.2.58 pour $A = K$ et $B = \{x_0\}$. On obtient ainsi une fonction $f \in E'$ telle que $a := \sup_{x \in K} f(x) < f(x_0)$. Il s'ensuit que le demi-espace $\{x \in E : f(x) \leq a\}$ contient $K$, mais pas $x_0$. Ceci termine la preuve.■

2.2.66 REMARQUE
Un fermé pour la topologie forte n'est pas, en général, fermé pour la topologie faible, par exemple la sphère unité en dimension infinie. Toutefois, pour les convexes, les fermetures fortes et faibles sont les mêmes.

2.2.67 PROPOSITION
Toute partie convexe $C$ de $E$ qui est fermée pour la norme est aussi faiblement fermée.
En particulier, les sous-espaces vectoriels fermés sont les mêmes pour les deux topologies.

*Démonstration:* Toute $\varphi \in E'$ est continue pour la topologie faible. Les demi-espaces $\{x \in E; \varphi(x) \leq \alpha\}$ sont donc fermés pour la topologie faible, et par conséquent $C$ aussi, puisque $C$ est égal à l'intersection des demi-espaces le contenant, par le corollaire 2.2.64. ■

2.2.69 Exercice (Ensembles convexes qui ne peuvent pas être séparés) Montrer que l'hypothèse d'ouverture dans 2.2.58 1) est essentielle. Pour cela, considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à une variable et à coefficients réels. Soient $A$, le sous-ensemble composé des polynômes à coefficient dominant négatif, et $B$ le sous-ensemble des polynômes dont tous les coefficients ne sont pas négatifs. Montrer que $A$ et $B$ sont des parties convexes disjointes de $\mathbb{R}[X]$ , et qu'il n'existe pas de forme linéaire non nulle $f$ sur $\mathbb{R}[X]$ telle que

$$f(a) \leq f(b) \quad \text{pour tout } a \in A, b \in B.$$

*(Indication : supposons que pour $C \in \mathbb{R}$ on a $f(a) \leq C \leq f(b)$, $a \in A$, $b \in B$ ; déduire de $0 \in B$ que $C \leq 0$ et en considérant les monômes, que $C \geq 0$.*

2.2.70 Exercice (Ensembles convexes fermés qui ne peuvent pas être strictement séparés) Montrer que l'hypothèse de compacité dans 2.2.58 2) est essentielle. Construire deux ensembles convexes fermés du plan $\mathbb{R}^2$ qui ne peuvent pas être strictement séparés.

### 2.2.2 Théorèmes de Carathéodory et de Krein-Milman

#### Enveloppe convexe

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $A$ une partie de $E$. L'enveloppe convexe de $A$, $Conv(A)$, est l'ensemble des barycentres à coéfficients positifs des points de $A$ i.e

$$Conv(A) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \mid I \text{ fini }, \lambda_i \in \mathbb{R}^+, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \text{ et } a_i \in A \right\}$$

2.2.71 Exercice Montrer que $Conv(A)$ est égal à l'intersection de tous les convexes contenant $A$.

Le théorème de Carathéodory ci-dessous affirme qu'en dimension $n$, on peut majorer par $n+1$ le cardinal de chaque ensemble $I$ intervenant dans la définition de $Conv(A)$.

2.2.72 Théorème (de Carathéodory)
Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$Conv(A) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \mid |I| \leq n+1,\ \lambda_i \in \mathbb{R}^+, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \text{ et } a_i \in A \right\}$$

---

*Démonstration:* On raisonne par l'absurde, on suppose qu'il existe un $x \in Conv(A)$ qui s'écrive comme combinaison convexe de $q \geq n+2$ éléments $x_i$ de $A$, $x = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}^+, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ et que $x$ ne puisse pas s'exprimer par une combinaison convexe de $q-1$ points. On remarquera que tous les $\lambda_i > 0$.

Comme $q > n+1$, les points $x_1, \ldots, x_q$ sont affinement liés (i.e. les vecteurs $x_2 - x_1, \ldots, x_q - x_1$ sont linéairement dépendants), si bien que l'on peut trouver $\mu_1, \ldots, \mu_q$, non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{q} \mu_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{q} \mu_i = 0$.

Soit $k \in \{1, \ldots, q\}$ tel que $\dfrac{\lambda_k}{\mu_k} = \inf_{1 \leq i \leq q} \{\dfrac{\lambda_i}{\mu_i} \mid \mu_i > 0\}$. En remplaçant, dans l'expression de $x$, $x_k$ par $-\sum_{i \neq k} \dfrac{\mu_i}{\mu_k} x_i$, on aura $x = \sum_{i \neq k} \delta_i x_i$, avec $\delta_i = \lambda_i - \lambda_k \dfrac{\mu_i}{\mu_k}$.

Alors $\sum_{i \neq k} \delta_i = \sum_{i \neq k} \lambda_i - \dfrac{\lambda_k}{\mu_k} \sum_{i \neq k} \mu_i = \sum_{i \neq k} \lambda_i = 1$ et

$\delta_i = \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\mu_k} \mu_i \geq \lambda_i - \lambda_i = 0$ si $\mu_i > 0$ et $\delta_i \geq \lambda_i$ si $\mu_i \leq 0$.

Donc $x = \sum_{i \neq k} \delta_i x_i$ est combinaison convexe de $q-1$ éléments de $A$, ce qui est une contredition.

2.2.74 COROLLAIRE

Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^n$, alors son enveloppe convexe est compacte.

---

*Démonstration:* .

On considère le compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ $\Delta = \{(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1\}$, et on définit l'application $\phi : K^{n+1} \times \Delta \to \mathbb{R}^{n+1}$, par

$$\phi((x_1, \ldots, x_{n+1}), (t_1, \ldots, t_{n+1})) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i.$$

Par le théorème de Caratheodory, $Conv(K) = \phi(K^{n+1} \times \Delta)$. Comme $\phi$ est continue (car elle est polynomiale) et $K^{n+1} \times \Delta$ est compact, $Conv(K)$ est compacte. ∎

2.2.76 REMARQUE

En dimension infinie, l'enveloppe convexe d'un compact n'est pas toujours compacte ni même fermée.
Par exemple, dans $\ell^2 = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 < +\infty\}$ on considère le compact

$$K = \{\frac{e_k}{k},\ k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}.$$

où $e_k = (\delta_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$.
Alors la suite

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{-i}}{\sum_{j=1}^{n} 2^{-j}} \frac{e_i}{i} \in Conv(K).$$

mais sa limite

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} \frac{e_i}{i}$$

ne peut pas s'écrire comme combinaison convexe ( finie) des éléments de $K$, donc n'est pas dans $Conv(K)$, ainsi $Conv(K)$ n'est pas fermée.

### Le théorème de Krein-Milman

Dans toute la suite $E$ sera un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

2.2.77 DÉFINITION

Soit $K$ un sous-ensemble convexe, non vide de $E$. Un *sous-ensemble extrémal* $S$ de $K$ est un sous-ensemble $S \subset K$ tel que

1. $S$ est un convexe fermé non vide.
2. Si $x \in S$ et $x = ty + (1-t)z$ avec $y, z \in K$ et $t \in ]0,1[$, alors $y, z \in S$.

Un *point extrémal* de $K$ est un point $x \in K$ tel que $\{x\}$ soit un sous-ensemble extrémal. En d'autres termes un point extrémal de $K$, n'est pas un point intérieur d'un segment contenu dans $K$.

On notera par $Ext(K)$, l'ensemble des points extrémaux de $K$.

---

2.2.78 EXEMPLE. 1) Soit $\Delta_n$ l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^{n+1}$ de la base canonique $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$. L'ensemble de ses points extrémaux est $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ qui est formé de $n+1$ points. Plus précisement, $\Delta_n$ a $2^{n+1}-1$ ensembles extrémaux propres ($\neq \Delta_n$). Pour $0 \leq k \leq n$, le convexe $\Delta_n$ a $\binom{n+1}{k+1}$ sous-ensembles extrémaux de dimension $k$.

2) L'hypercube $C_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 1, i \in \{1, \ldots, n\}\}$ a $2n$ points extrémaux à savoir $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$.

3) La boule fermée $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ a la sphère $S(0,1)$ comme ensemble de ses points extrémaux, ce qui montre que l'ensemble des points extrémaux peut-être infini.

4) L'exemple suivant, montre que l'ensemble des points extrémaux d'un compact n'est nécessairement fermé. On considère le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$,
$A = Conv\left(\{(x, y, 0) | x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(1,0,1), (1,0,-1)\}\right)$.
Alors, $Ext(A) = \{(x, y, 0) | x^2 + y^2 = 1, x \neq 1\} \cup \{(1,0,1), (1,0,-1)\}$ n'est pas fermé.

2.2.79 REMARQUE

1. Tout convexe non vide $K$ est un sous-ensemble extrémal de lui-même.
2. $x$ est un point extrémal de $K$ si et seulement si $K - \{x\}$ est convexe.

Le lemme suivant donne une manière canonique de construire des ensemble extrémaux.

2.2.80 LEMME

Soit $K$ un convexe compact non vide de $E$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue, telle que $f_{|_K}$ n'est pas constante. on pose

Alors, l'ensemble $S_f = \{x \in K \mid f(x) = \max_{x \in K} f(x)\}$, est un sous-ensemble extrémal strictement contenu dans $K$.

*Démonstration: (du lemme)* Posons $m_f = \max_{x \in K} f(x)$. Par compacité de $K$ et continuité de $f$, $S_f = f^{-1}(\{m_f\})$, est un fermé non vide. Comme $f$ est linéaire, $S_f$ est convexe. De plus, si $x \in S_f$, s'écrit $x = ty + (1-t)z$, avec $y, z \in K$ et $t \in ]0,1[$, alors $m_f = f(x) = tf(y) + (1-t)f(z)$ et donc $t(m_f - f(y)) + (1-t)(m_f - f(z)) = 0$. Comme $f(y) \leq m_f$ et $f(z) \leq m_f$ et $t \in ]0,1[$ on a nécessairement $m_f = f(y) = f(z)$ i.e. $y, z \in S_f$. Enfin $S_f$ est strictement contenu dans $K$, car $f$ n'est pas constante. ∎

2.2.82 LEMME
Soit $K$ un convexe compact non vide de $E$. Soit $S \subset K$ un sous-ensemble extrémal de $K$. Soit $S' \subset S$. Alors $S'$ est un sous-ensemble extrémal de $S$ si et seulement si $S'$ est un sous-ensemble extrémal de $K$.
En particulier, $Ext(S) = Ext(K) \cap S$.

*Démonstration:* Si $S'$ est un sous-ensemble etrémal $K$, $x \in S'$, et $x$ est un point interior de $[y, z] \subset S$, c'est aussi un point intérieur de $[y, z] \subset K$. Donc, $y, z \in S'$, et donc $S'$ est un sous-ensemble extrémal de $S$.

Réciproquement, if $S'$ est un sous-ensemble extrémal de $S$, $x \in S'$, et $x \in [y, z] \subset K$. Du fait que $x \in S$ on a $y, z \in S$ d'où $[y, z] \subset S$. Mais comme, $S'$ est extrémal dans $S$, $y, z \in S'$ ainsi $S'$ est extrémal dans $K$. ∎

2.2.84 THÉORÈME ( DE KREIN-MILMAN)
Soit $E$ un espace vectoriel normé, $K$ un sous-ensemble compact, convexe non vide de $E$. Alors

1) $Ext(K) \neq \emptyset$ i.e. tout compact convexe non vide a au moins un point extrémal.
2) $K = \overline{Conv(Ext(K))}$, tout compact convexe est égal à l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

---

*Démonstration:* On considère $\mathscr{E}$ l'ensemble des sous-ensembles extrémaux de $K$. Comme $K \in \mathscr{E}$, cet ensemble n'est pas vide. On ordonne $\mathscr{E}$ par l'inclusion inverse i.e. $A \leq B$ si est seulement si $B \subset A$. On veut appliquer le lemme de Zorn pour montrer que $\mathscr{E}$ a un élément "maximal", i.e., un sous-ensemble qui est *minimal* par rapport à l'inclusion. On va vérifier que $(\mathscr{E}, \leq)$ est inductif.

Soit $\mathscr{T} = \{A_i : i \in I\} \subset \mathscr{E}$ une partie totalement ordonnée de $\mathscr{E}$. On doit montrer que $\mathscr{T}$ admet un majorant et $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ est le candidat "naturel". On doit montrer que $A \in \mathscr{E}$ i.e. $A$ est un sous-ensembles extrémal de $K$.

Clairement, $A$ est un fermé, comme intersection de fermés. On vérifie facilement qu'une intersection non-vide, de sous-ensembles extrémaux est un sous-ensemble extrémal de $K$. Il nous reste a montrer que $A$ n'est pas vide. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors $\emptyset = \bigcap_{i\in I} A_i$, par compacité de $K$, une intersection finie $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$. Mais, comme $\mathscr{T}$ est une partie totalement ordonnée, cela impliquerait que l'un des $A_i$ soit vide, contredisant ainsi le fait que chaque $A_i$ est un élément de $\mathscr{E}$. Ainsi $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ est un majorant de $\mathscr{T}$. D'où $(\mathscr{E}, \leq)$ est inductif et d'après le lemme de Zorn, $\mathscr{E}$ admet un élément maximal $F$. On va montrer que $F$ est un singleton. Sinon, $F$, a au moins 2 points. D'après 2.2.58, il existe une forme linéaire continue $f_0$ sur $E$, qui sépare deux points de $F$. D'après le lemme 2.2.80, $S_{f_0} = \{x \in F : f_0(x) = \max_{z\in F} f(z)\}$ est sous-ensemble extrémal de $F$ et d'après le lemme 2.2.82, il est aussi un sous-ensemble extrémal de $K$. Comme $f$ n'est pas constante, $S_{f_0} \subsetneq F$, mais alors $F$ n'est pas un élément maximal de $\mathscr{E}$, d'où contradiction. Ainsi $F$ est nécessairemen un singleton.

Ceci prouve le 1) du théorème, i.e. $K$ a au moins un point extrémal.

Soit $K_e = \overline{Conv(Ext(K))}$, comme $Ext(K) \subset K$, par convexité de $K$, $Conv(Ext(K)) \subset K$ et donc $K_e \subset K$, car $K$ est fermé. On va montrer maintenant $K \subset K_e$.

Soit, $z \notin K_e$. Comme $z \notin K_e$, d'après la théorème 2.2.58, il existe une forme linéaire continue $\ell$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $\ell(y) \leq c < \ell(z)\quad$ pour tout $y \in K_e$.

D'après le lemme 2.2.80, le sous-ensemble $S_\ell = \{x \in K \;:\; \ell(x) = \max_{t\in K} \ell(t)\}$ est extrémal dans $K$, il contient donc un point extrémal $p$ de $K$. Ainsi $p \in Ext(K) \subset K_e$ et par suite$\ell(p) \leq c$. Comme $\ell(p) = \max_{x\in K} \ell(x)$, on aura donc pour tout $y \in K$, $\ell(y) \leq c$. D'autre part $\ell(z) > c$, donc $z \notin K$. On a ainsi montré que $K \subset K_e$. ∎

### Topologie faible et topologie faible-∗

Soit $E$ un evn. La *topologie forte* sur $E'$ est la topologie de la norme ($\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$). On va définir d'autres topologies aussi naturelles.

**2.2.86 Définition**

Soient $E$ un espace normé et $E'$ son dual.

1) On appelle topologie faible sur $E$ et on la note $\sigma(E, E')$, la topologie sur $E$ la moins fine rendant continue les éléments de $E'$.
2) On appelle topologie faible-∗ sur $E'$ et on la note $\sigma(E', E)$, la topologie sur $E'$ la moins fine rendant continue les applications linéaires $f \mapsto f(x),\ x \in E$.

---

**2.2.87 Remarque**

Puisque les éléments de $E'$ (resp. les applications $f \mapsto f(x),\ x \in E$) sont continues pour la topologie définie par la norme sur $E$ (resp. sur $E'$), ces topologies sont moins fines que celles des normes ( qu'on appelle aussi topologie forte).

On va décrire ces topologies en donnant des bases de voisinages des points.

**2.2.88 Proposition**

1) Une base de voisinages pour la topologie faible d'un point $x_0 \in E$ *est donnée par les parties* :

$$V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) = \{x \in E;\, |\varphi_i(x - x_0)| \leq \varepsilon,\ \forall i = 1,\ \ldots,\ n\} = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\varepsilon,\varphi_i}(x_0),$$

où $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$ et $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n \in E'$ sont arbitraires.
La topologie $\sigma(E, E')$ est séparée.

2) Une base de voisinages pour la topologie faible-$*$ d'une forme $\varphi_0 \in E'$ est donnée par :

$$W_{\varepsilon,x_1,\ldots,x_n}(\varphi_0) = \{\varphi \in E';\, |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| \leq \varepsilon,\ \forall i = 1,\ \ldots,\ n\} = \bigcap_{i=1}^{n} W_{\varepsilon,x_i}(\varphi_0)$$

où $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$ et $x_1,\ \ldots,\ x_n \in E$ sont arbitraires.
La topologie $\sigma(E', E)$ est séparée.

*Démonstration:* 1) On vérifie que ces ensemble forment une base d'une topologie, que cette topologie est moins fine que la topologie de la norme, car pour tout $x_0 \in E$, toute forme $\varphi \in E'$ est continue en $x_0$ pour la norme et donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que $B(x_0, \delta) \subset V_{\varepsilon,\varphi}(x_0)$. D'autre part, pour toute topologie $\tau$ sur $E$, telle que tout $\varphi \in E'$, est continue on a pour tous $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$, $V_{\varepsilon,\varphi}(x_0) = \varphi^{-1}(]\varphi(x_0) - \varepsilon,\ \varphi(x_0) + \varepsilon[) \in \tau$ et donc $V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\varepsilon,\varphi_i}(x_0) \in \tau$. On ainsi montré que cette topologie est moins fine que $\tau$, donc cette topologie est bien $\sigma(E, E')$ la topologie faible. Il reste à voir qu'elle est séparée. Or si $x_1 \neq x_2$, il existe d'après le théorème de Hahn-Banach, $\varphi \in E'$ telle que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ ; en posant $\varepsilon = \frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|}{3}$, les voisinages $V_{\varepsilon,\varphi}(x_1)$ et $V_{\varepsilon,\varphi}(x_2)$ sont disjoints.

2) Même argument, par exemple si $\varphi_1 \neq \varphi_2$, il existe $x \in E$ tel que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$ ; alors, pour $\varepsilon = \frac{|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|}{3}$, on a $W_{\varepsilon,x}(\varphi_1) \cap W_{\varepsilon,x}(\varphi_2) = \emptyset$, elle est donc séparée.
■

**2.2.90 Remarque**
Soit $E$ un evn. On a ainsi définit sur son dual $E'$ trois topologies :
- la topologie faible-$*$, $\sigma(E',\ E)$
- La topologie faible, $\sigma(E',\ E'')$
- la topologie forte i.e. la topologie de la norme $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} |f(x)|$.

D'après la définition, $\sigma(E',\ E)$ est moins fine que la topologie faible $\sigma(E',\ E'')$, qui elle-même est moins fine que la topologie forte.
Si $E$ est un espace reflexif, les topologie faible et faible-$*$ coincident.

**2.2.91 Exercice** Montrer que si $\dim E = +\infty$, et $S_E = \{x \in E; \|x\| = 1\}$, alors l'adhérence de $S_E$ pour la topologie faible est égale à $\bar{B}_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$.

En général, les toplogies faibles ne sont pas métrisables (voir 1.2.41), on va se contenter de parler de la convergence des suites, même si celles-ci ne suffisent pas pour étudier la topologie faible. Il résulte immédiatement de la description des voisinages faibles que l'on a :

2.2.92 PROPOSITION

1) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ pour la topologie faible sur $E$ si et seulement si :
$$\forall \varphi \in E' \text{ on a : } \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x).$$
qu'on notera : $x_n \xrightharpoonup[n]{} x$

2) La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi$ pour la topologie faible-$*$ sur $E'$ si et seulement si :
$$\forall x \in E \text{ on a : } \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

*Démonstration:* 1) $\Rightarrow$ Conséquence de la continuité de $\varphi$.

$\Leftarrow$ Soit $V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x) = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\varepsilon,\varphi_i}(x)$ un voisinage de base de $x$. Comme pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$, il existe $N_i(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $|\varphi_i(x_n) - \varphi_i(x)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N_i(\varepsilon)$, i.e. $\varphi_i(x_n) \in V_{\varepsilon,\varphi_i}(x)$ pour tout $n \geq N_i(\varepsilon)$. Posant $N(\varepsilon) := \max_{i\in I}(N_i)$. Alors $x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} V_{\varepsilon,\varphi_i}(x)$ pour tous $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $n \geq N(\varepsilon)$, donc $(x_n)$ converge vers $x$ pour la topologie faible.

2) Même argument. ∎

2.2.94 PROPOSITION

Les topologie faible et forte coïncident sur $E$ si et seulement si $\dim E < +\infty$.

*Démonstration:* Supposons que $\dim E = n < +\infty$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$, on définit la norme $\|.\|_\infty$, en posant pour $x \in E$, $\|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n}|x_i|$ où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est la décomposition de $x$ dans la base. Comme les normes sur $E$ sont équivalentes, pour montrer que la topologie forte est égale à la topologie faible, il suffit de montrer que toute boule est un ouvert pour la topologie faible.

Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, alors
$$B(x, \epsilon) = \{y \in E \,|\, \|y - x\|_\infty < \epsilon\} = \{y \in E \,|\, |y_i - x_i| < \epsilon, \ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

Soit pour tout $i$, $\varphi_i : E \to \mathbb{K}$, la projection sur la $i$ ieme coordonnée

Alors $B(x, \epsilon) = \{y \in E \,|\, |\varphi_i(y) - \varphi_i(x)| < \epsilon, \ \forall i = 1, \ldots, n\} = V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x)$ est un ouvert de la topologie faible.

Supposons que $\dim E = +\infty$. Nous allons montrer que 0 est dans l'adhérence de $S = \{x \in E \,|\, \|x\| = 1\}$ pour la topologie faible.

Comme $S$ est un fermé pour la topologie forte et que $0 \notin S$, son adhérences pour la topologie faible est distincte de celle de la topologie forte. Donc ces topologies sont distinctes.

Soit $V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(0)$ un élément de la base de voisinage de 0 pour $\sigma(E, E')$. On a $\bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$, de codimension au plus $n$, contenu dans $V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(0)$. Comme $\dim E = +\infty$, par le théorème du rang, $\dim \bigcap_{i=1}^n \ker \varphi_i = +\infty$ et donc il existe $x \neq 0$ tel que $x \in \bigcap_{i=1}^n \ker \varphi_i$, par homogénéité $\dfrac{x}{\|x\|} \in \bigcap_{i=1}^n \ker \varphi_i$ doù $S \cap V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(0)$ n'est pas vide. Comme $S$ rencontre tout voisinage de 0, pour la topologie faible, 0 est dans l'adhérence de $S$ pour cette topologie. ■

2.2.96 Exercice Montrer que si $\dim E = +\infty$, et $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$, alors l'adhérence de $S$ pour la topologie faible est égale à $\bar{B} = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$.

2.2.97 Remarque

Un fermé pour la topologie forte n'est pas, en général, fermé pour la topologie faible. Toutefois, pour les convexes, les fermetures fortes et faibles sont les mêmes.

2.2.98 Proposition

Toute partie convexe $C$ de $E$ qui est fermée pour la norme est aussi faiblement fermée.
En particulier, les sous-espaces vectoriels fermés sont les mêmes pour les deux topologies.

*Démonstration:* Toute $\varphi \in E'$ est continue pour la topologie faible. Les demi-espaces $\{x \in E;\ \varphi(x) \leq \alpha\}$ sont donc fermés pour la topologie faible, et par conséquent $C$ aussi, puisque $C$ est égal à l'intersection des demi-espaces le contenant, par le corollaire 2.2.64. ■

2.2.100 Remarque

Le résultat précédent n'est pas vrai en général, pour la topologie faible-$*$ En effet, les formes linéaires continues pour la topologie faible-$*$ sur $E'$, sont exactement celles de la forme $f \mapsto f(x)$ pour $x \in E$. En particulier, si $E$ n'est pas réflexif, il existe $f \in E''$ qui ne soit pas de la forme précédente, i.e. une évaluation en un point, alors l'hyperplan $H = \ker f$ est fermé pour la topologie forte sur $E'$ mais pas pour la topologie faible-$*$.

2.2.101 Remarque

Le résultat précédent n'est pas vrai en général, pour la topologie faible-$*$ En effet, les formes linéaires continues pour la topologie faible-$*$ sur $E'$, sont exactement celles de la forme $f \mapsto f(x)$ pour $x \in E$. En particulier, si $E$ n'est pas réflexif, il existe $f \in E''$ qui ne soit pas de la forme précédente, i.e. évaluation en un point, alors l'hyperplan $H = \ker f$ est fermé pour la topologie forte sur $E'$ mais pas pour la topologie faible-$*$.